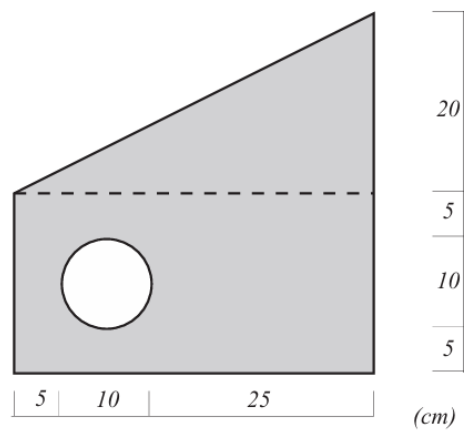


## Вежба 1

### Задатак:

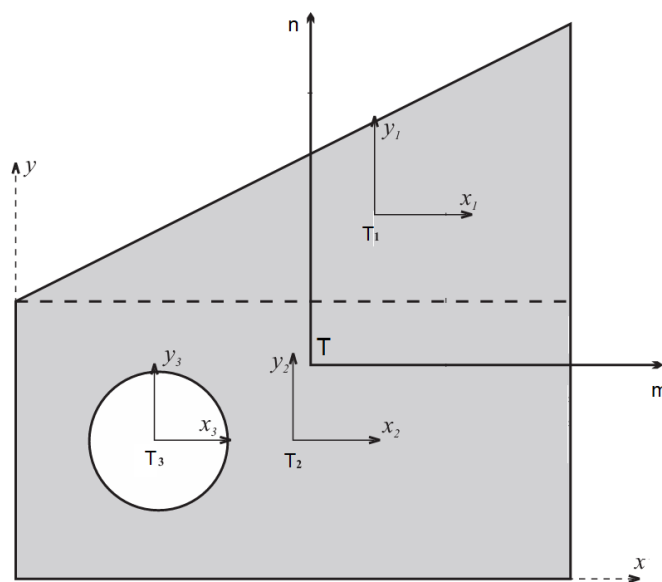
За површину приказану на слици одредити:

1. Аналитичким путем положај тежишта
2. Аксијалне моменте инерције и центрифугални момент за централне осе
3. Главне централне моменте инерције
4. Полупречници инерције за централне и главне централне осе
5. Конструисати елипсу инерције за главне централне осе



### Решење:

#### 1. Одређивање тежишта аналитичким путем



Статички моменти појединачних тела и целог тела:

$$\begin{aligned}
 x_{T1} &= 40 \cdot \frac{2}{3} = 26,667 \text{ cm} & y_{T1} &= 20 + \frac{20}{3} = 26,667 \text{ cm} & A_1 &= \frac{40 \cdot 20}{2} = 400 \text{ cm}^2 \\
 x_{T2} &= 20 \text{ cm} & y_{T2} &= 10 \text{ cm} & A_2 &= 40 \cdot 20 = 800 \text{ cm}^2 \\
 x_{T3} &= 10 \text{ cm} & y_{T3} &= 10 \text{ cm} & A_3 &= 5^2 \cdot \pi = 78,540 \text{ cm}^2 \\
 S_{x1} &= y_{T1} \cdot A_1 = 26,667 \cdot 400 = 10.666,667 \text{ cm}^3 \\
 S_{y1} &= x_{T1} \cdot A_1 = 26,667 \cdot 400 = 10.666,667 \text{ cm}^3 \\
 S_{x2} &= y_{T2} \cdot A_2 = 10 \cdot 800 = 8.000 \text{ cm}^3 \\
 S_{y2} &= x_{T2} \cdot A_2 = 20 \cdot 800 = 16.000 \text{ cm}^3 \\
 S_{x3} &= y_{T3} \cdot A_3 = 10 \cdot 78,540 = 785,375 \text{ cm}^3 \\
 S_{y3} &= x_{T3} \cdot A_3 = 10 \cdot 78,540 = 785,375 \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_x &= S_{x1} + S_{x2} - S_{x3} = 10.666,667 + 8.000 - 785,375 = 25.881,269 \text{ cm}^3 \\
 S_y &= S_{y1} + S_{y2} - S_{y3} = 10.666,667 + 16.000 - 785,375 = 17.881,269 \text{ cm}^3 \\
 A &= A_1 + A_2 - A_3 = 400 + 800 - 78,540 = 1.121,460
 \end{aligned}$$

Положај тежишта

$$\begin{aligned}
 x_T &= \frac{S_y}{A} = \frac{17.881,269}{1.121,460} = 23,078 \text{ cm} \\
 y_T &= \frac{S_x}{A} = \frac{25.881,269}{1.121,460} = 15,945 \text{ cm} \\
 T &(23,078; 15,945)
 \end{aligned}$$

## 2. Аксијални моменти инерције и центрифугални момент за централне осе

Аксијални моменти инерције појединачних тела

$$\begin{aligned}
 I_m^1 &= I_{x1}^S + I_{x1}^P = \frac{b \cdot h^3}{36} + (y_{T1} - y_T)^2 \cdot A_1 = \frac{40 \cdot 20^3}{36} + (26,667 - 15,945)^2 \cdot 400 \\
 &= 8.888,889 + 45.984,513 = 54.873,402 \text{ cm}^4 \\
 I_m^2 &= I_{x2}^S + I_{x2}^P = \frac{b \cdot h^3}{12} + (y_{T2} - y_T)^2 \cdot A_2 = \frac{40 \cdot 20^3}{12} + (10 - 15,945)^2 \cdot 800 \\
 &= 26.666,667 + 28.274,42 = 54.941,087 \text{ cm}^4 \\
 I_m^3 &= I_{x3}^S + I_{x3}^P = \frac{r^4 \cdot \pi}{4} + (y_{T3} - y_T)^2 \cdot A_3 = \frac{5^4 \cdot \pi}{4} + (10 - 15,945)^2 \cdot 78,540 \\
 &= 490,859 + 2.775,856 = 3.266,715 \text{ cm}^4 \\
 I_n^1 &= I_{y1}^S + I_{y1}^P = \frac{h \cdot b^3}{36} + (x_{T1} - x_T)^2 \cdot A_1 = \frac{20 \cdot 40^3}{36} + (26,667 - 23,078)^2 \cdot 400 \\
 &= 35.555,556 + 5.152,368 = 40.707,924 \text{ cm}^4
 \end{aligned}$$

$$I_n^2 = I_{y2}^S + I_{y2}^P = \frac{h \cdot b^3}{12} + (x_{T2} - x_T)^2 \cdot A_2 = \frac{20 \cdot 40^3}{12} + (20 - 23,078)^2 \cdot 800$$

$$= 106.666,667 + 7.579,267 = 114.245,934 \text{ cm}^4$$

$$I_n^3 = I_{y3}^S + I_{y3}^P = \frac{r^4 \cdot \pi}{4} + (x_{T3} - x_T)^2 \cdot A_3 = \frac{5^4 \cdot \pi}{4} + (10 - 23,078)^2 \cdot 78,540$$

$$= 490,859 + 13.433,032 = 13.923,891 \text{ cm}^4$$

Аксијални моменти инерције целог тела

$$I_m = I_m^1 + I_m^2 - I_m^3 = 54.873,402 + 54.941,087 - 3.266,715 = 106.547,774 \text{ cm}^4$$

$$I_n = I_n^1 + I_n^2 - I_n^3 = 40.707,924 + 114.245,934 - 13.923,891 = 141.029,967 \text{ cm}^4$$

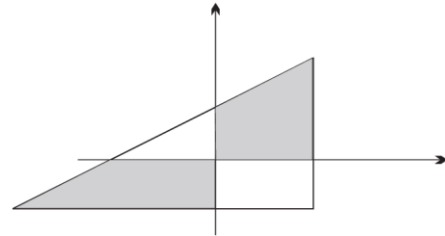
Центрифугални моменти инерције целог тела

Ако је већина површине у квадрантима

где  $x \cdot y > 0 \rightarrow I_{x1y1}^S > 0$

Ако је већина површине у квадрантима

где  $x \cdot y < 0 \rightarrow I_{x1y1}^S < 0$



$$I_{mn}^1 = I_{x1y1}^S + I_{x1y1}^P = \frac{b^2 \cdot h^2}{72} + (x_{T1} - x_T) \cdot (y_{T1} - y_T) \cdot A_1$$

$$= \frac{40^2 \cdot 20^2}{72} + (26,667 - 23,078) \cdot (26,667 - 15,945) \cdot 400$$

$$= 24.281,392 \text{ cm}^4$$

$$I_{mn}^2 = I_{x2y2}^S + I_{x2y2}^P = 0 + (x_{T2} - x_T) \cdot (y_{T2} - y_T) \cdot A_2$$

$$= (20 - 23,078) \cdot (10 - 15,945) \cdot 800 = 14638.968 \text{ cm}^4$$

$$I_{mn}^3 = I_{x3y3}^S + I_{x3y3}^P = 0 + (x_{T3} - x_T) \cdot (y_{T3} - y_T) \cdot A_3 = (10 - 23,078) \cdot (10 - 15,945) \cdot A_3$$

$$= 6.106,384 \text{ cm}^4$$

$$I_{mn} = I_{mn}^1 + I_{mn}^2 - I_{mn}^3 = 32.813,976 \text{ cm}^4$$

### 3. Главни централни моменти инерције

$$I_{max,min} = I_{1,2} = \frac{1}{2}(I_m + I_n) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_m - I_n)^2 + 4 \cdot I_{mn}^2}$$

$$= \frac{1}{2}(106.547,774 + 141.029,967)$$

$$\pm \frac{1}{2}\sqrt{(106.547,774 - 141.029,967)^2 + 4 \cdot 32.813,976^2}$$

$$= 123.788,871 \pm 37.067,674$$

$$I_1 = 123.788,871 + 37.067,674 = 160.856,545 \text{ cm}^4$$

$$I_2 = 123.788,871 - 37.067,674 = 86.721,197 \text{ cm}^4$$

#### 4. Полупречници инерције за централне и главне централне осе

Полупречници инерције за централне осе

$$i_m = \sqrt{\frac{I_m}{A}} = \sqrt{\frac{106.547,774}{1.121,460}} = 9,747 \text{ cm}$$

$$i_n = \sqrt{\frac{I_n}{A}} = \sqrt{\frac{141.029,967}{1.121,460}} = 11,214 \text{ cm}$$

Полупречници инерције за главне централне осе

$$i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A}} = \sqrt{\frac{160.856,545}{1.121,460}} = 11,976 \text{ cm}$$

$$i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}} = \sqrt{\frac{86.721,197}{1.121,460}} = 8,794 \text{ cm}$$

#### 5. Конструисати елипсу инерције за главне централне осе

Угао  $\alpha$  између централних оса (m, n) и главних централних оса (1, 2)

$$\tan 2\alpha = \frac{-2 \cdot I_{mn}}{I_m - I_n} = \frac{-2 \cdot 32.813,976}{106.547,774 - 141.029,967} = 1,903$$

$$2\alpha = \arctan(1,903) = 62,279^\circ$$

$$\text{ако је } (I_m - I_n) > 0, \quad \alpha = \frac{62,279^\circ}{2} = 31,139^\circ$$

$$\text{ако је } (I_m - I_n) < 0, \quad \alpha = 31,139^\circ + 90^\circ,$$

$$(I_m - I_n) < 0 \rightarrow \alpha = 31,139^\circ + 90^\circ = 121,139^\circ$$

